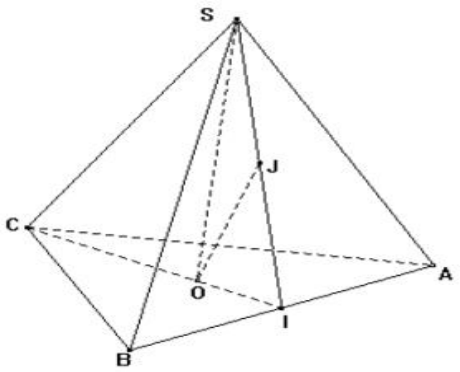
# هندسة في الفضاء

## التمرين 1 :




SABCD هرم منتظم بحيث:

$SA = SB = SC = AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$ و O مركز الدّائرة المحيطة بقاعدته ABC و SO ارتفاعه و I منتصف [AB]

1) أ- ما هي طبيعة كلّ من المثلّثين ABC و SAB؟ علّل إجابتك.

ب- استنتج أنّ $(SIC) \perp (AB)$

2) أ- احسب CI

ب- استنتج أنّ $OI = 1$

3) احسب الارتفاع SO

4) لتكن J منتصف [IS] احسب OJ

## الإصلاح :

( 4 نقاط 0,5 + 1 + 0,5 + 0,5 + 1 + 0,5 )

SABCD هرم منتظم بحيث :

$SA = SB = SC = AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$ و O مركز الدّائرة المحيطة بقاعدته ABC و SO ارتفاعه و I منتصف [AB]

1) أ- ما هي طبيعة كلّ من المثلّثين ABC و SAB؟ علّل إجابتك.

***لدينا*** $AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$ ***إذن*** $ABC$ ***متقايس الأضلاع كذلك*** $SAB$ ***متقايس الأضلاع لأنّ*** $SA = SB = AB = 2\sqrt{3}$

ب- استنتج أنّ $(SIC) \perp (AB)$

***بما أنّ كلاّ من المثلّثين*** $ABC$ ***و*** $SAB$ ***متقايس الضّلعين و*** $I$ ***منتصف*** $[AB]$ ***فإنّ*** $[CI]$ ***و*** $[SI]$ ***الارتفاعان الموافقان للضلع*** $[AB]$

***و منه*** $(AB)$ ***يعامد*** $(SI)$ ***و*** $(CI)$ ***المتقاطعين في*** $I$ ***إذن*** $(SIC) \perp (AB)$

1) أ- احسب CI

$[CI]$ ***ارتفاع المثلّث المتقايس الأضلاع*** $ABC$ ***إذن*** $CI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2} = 3$

ب- استنتج أنّ $OI = 1$

$ABC$ ***متقايس الأضلاع و*** $O$ ***مركز الدّائرة المحيطة به إذن*** $O$ ***مركز ثقل هذا المثلّث و منه*** $OI = \frac{1}{3}CI = \frac{1}{3}\times 3 = 1$

2) احسب الارتفاع SO

$OIS$ ***قائم في*** $O$ ***حسب نظريّة بيتاغور فإنّ*** $SO^2 = SI^2 - OI^2 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$ ***و منه*** $SO = 2\sqrt{2}$ ( $[SI]$ ***ارتفاع المثلث المتقايس الأضلاع*** $SAB$ ***إذن*** $SI = 3$ )

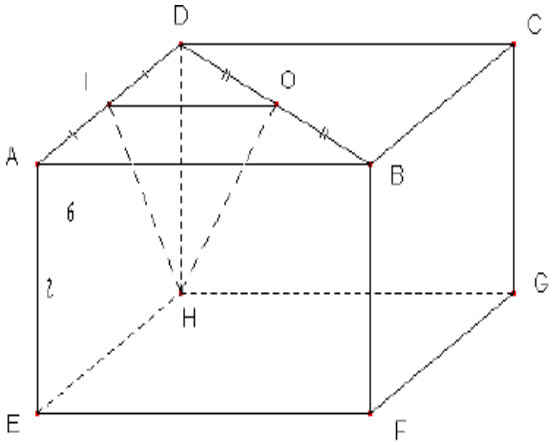
3) لتكن J منتصف [IS] احسب OJ

$OIS$ ***قائم في*** $O$ ***و*** $J$ ***منتصف وتره*** $[SI]$ ***إذن*** $OJ = JS = JI = \frac{SI}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$



2019 Tunisie College.net

## التمرين 2 :




نعتبر متوازي مستطيلات ABCDEFGH ، حيث AB=6 cm و AD=4 cm و $AE = 2\sqrt{3}$ cm

1) لتكن O مركز المستطيل ABCD. بين أن $BD = 2\sqrt{13}$ ثم أستنتج $OD$ .

2) لتكن I منتصف [AD] . بين أن (IO)// (AB) ثم احسب OI.

3)-أ)-بين أن (HD) ⊥ (ABD).

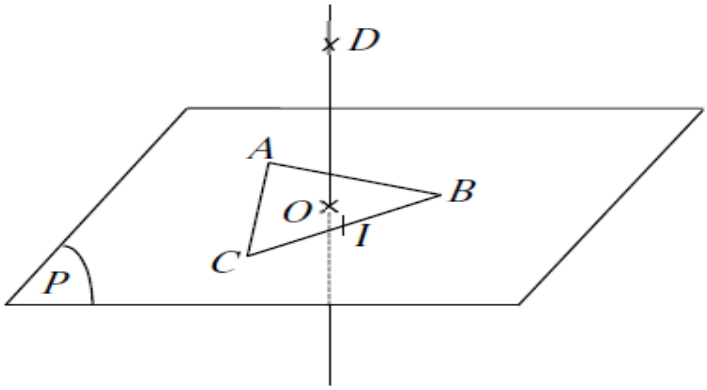
ب) استنتج أن HDO مثلث قائم في D ثم بين أن OH=5.

4) احسب IH ثم استنتج أن المثلث IOH قائم في I .

2

## التمرين 3 :

ليكن $P$ مستوي و A , B و C ثلاث نقاط من المستوي بحيث المثلّث ABC متقايس الأضلاع. لتكن I منتصف [BC] و $O$ مركز الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC و (Δ) المستقيم المارّ من $O$ و العمودي على $P$ .




نعتبر D نقطة من (Δ) مخالفة لـ O .

لتكن AB=6 و OD=6 .

1) بيّن أنّ DC = BD .

2) ليكن (Δ') العمودي على $P$ في I .

أ) بيّن أنّ (IAD) ⊂ (Δ') .

ب) استنتج أنّ (IAD) ⊥ (BC) .

3) أحسب AI ثمّ مساحة المثلّث ABC .

4) أحسب OA. ثمّ استنتج أن $DC = 4\sqrt{3}$ .

## التمرين 4 :

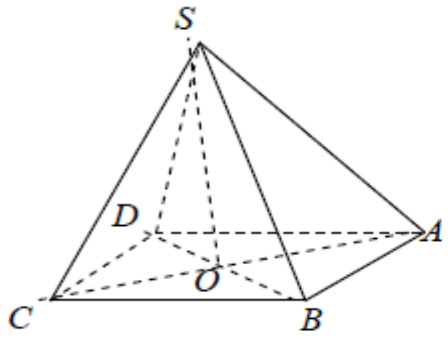
$SABCD$ هرما منتظما قاعدته المربع $ABCD$ مركزه $O$ و $AB = 4\sqrt{2}$ و $SO = 3$ ارتفاعه

1 - أحسب $OA$

2 - أ-بين أن المثلث $SOA$ قائم الزاوية في $O$

ب - أحسب $SA$

3-لتكن $E$ منتصف $[SA]$ و $F$ منتصف $[SB]$




أ - احسب $EF$

ب - بين أن $(EF)\square(ABC)$

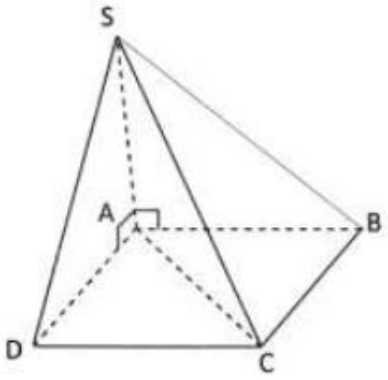
3 - لتكن $G$ منتصف $[BC]$

ماهي طبيعة الرباعي $EFGO$ علل جوابك



2019 Tunisie College.net

## التمرين 5 :




(وحدة قيس الطول هي الصنتمتر)

يمثل الرسم المصاحب هرما SABCD حيث ABCD مربّع و $AB = 2\sqrt{2}$.

المستقيم (SA) عموديّ على المستقيمين (AB) و (AD) و $SA = 2\sqrt{5}$.

1) أ) بيّن أنّ المستقيم (SA) عموديّ على المستوي (ABD).

ب) استنتج أنّ المثلّث SAC قائم الزاوية.

2) أ) أحسب البعد AC.

ب) بيّن أنّ $SC = 6$.

3) لتكن E منتصف [SC]. أحسب البعد AE.

3

## الإصلاح :

1) أ- بما أنّ : المستقيم (SA) عمودي على (AB) و (AD) على التّوالي في النّقطة A،وهما مستقيمين من المستوي (ABD).

فإنّ: $\boxed{(SA) \perp (ABD)}$

ب- بما أنّ المستقيم (SA) عمودي على المستوي (ABD) في النّقطة A ، فإنّ كلّ مستقيم محتو في المستوي (ABD) و مارّ من A يكون عموديّا على (SA) و منه : $(AC) \perp (SA)$ يعني SAC مثلّث قائم الزّاوية في A .

2) أ- بما أنّ ABCD مربّع طول ضلعه $2\sqrt{2}$ ، فإنّ: $AC = \sqrt{2} \times AB = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4\ cm$ ، و بالتّالي: $\boxed{AC = 4\ cm}$

ب- بتطبيق نظريّة بيتاغور في المثلّث SAC القائم في A ، فإنّ: $SC^2 = AC^2 + AS^2$ يعني $SC^2 = 4^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2$

يعني $SC^2 = 16 + 20$ يعني $SC^2 = 36$ يعني $SC = \sqrt{36} = 6\ cm$ ، و بالتّالي: $\boxed{SC = 6\ cm}$

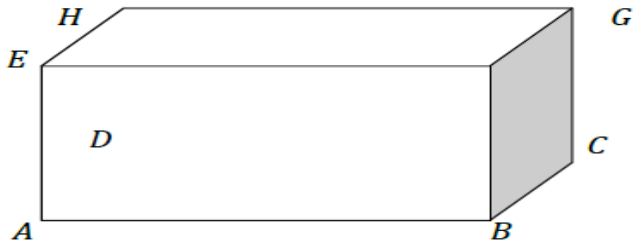
3) بما أنّ SAC مثلّث قائم الزّاوية في A فإنّ منتصف وتره [SC] متساوي البعد عن رؤوسه الثّلاثة ،

و بما أنّ E منتصف الوتر [SC] فإنّ $AE = ES = EC = \frac{SC}{2}$ يعني $AE = \frac{6}{2} = 3$ و بالتّالي $\boxed{AE = 3\ cm}$

## التمرين 6 :

يمثل الرسم المصاحب متوازي مستطيلات $ABCDEFGH$ حيث $AB = 6$ و $BC = 4$ و $AE = 2\sqrt{3}$

و $O$ مركز المستطيل $ABCD$ .




1) احسب $AG$ .

2) احسب $BD$ ثم استنتج $OD$ .

3) ليكن $K$ منتصف $[AD]$.

أ) احسب $OK$ .

ب) بين أن المثلث $OHD$ قائم ثم استنتج $OH$ .

ج) احسب $KH$ .

د) بين أن المثلث $KOH$ قائم الزاوية .

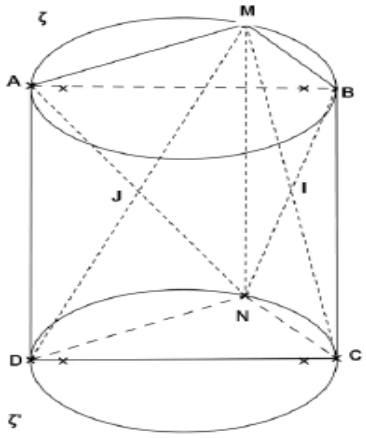
4) لتكن $I$ نقطة من $[A]$ حيث $AI = \sqrt{3}$ و $J$ مسقط $I$ على $(OA)$ وفقا لمنحى $(OB)$ .

احسب $IJ$ .



2019 Tunisie College.net

## التمرين 7 :




في الرسم المقابل اسطوانة دائرية قائمة
[AB] قطر لقاعدتها $\zeta$ و [CD] قطر لقاعدتها $\zeta'$
M نقطة على $\zeta$ و N نقطة على $\zeta'$ حيث MBCN و AMND
مستطيلان مركزيهما على التوالي I و J
لدينا: $AB = 5$ ، $AM = 3$ و $AD = 2\sqrt{3}$.

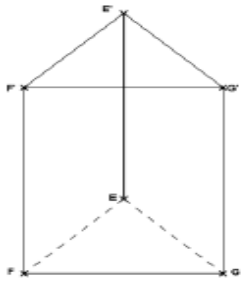
1) أ/ أحسب MB واستنتج أنّ $MI = \sqrt{7}$.
ب/ بيّن أنّ المستقيم (AM) عمودي على المستوي (MBC)
ج/ استنتج أنّ المثلث AMI قائم الزاوية في M وأنّ $AI = 4$.
2) المستقيمان (AI) و (BJ) يتقاطعان في O.
أ/ بيّن أنّ (IJ) موازي لـ (AB) وأنّ $\frac{AB}{IJ} = 2$.
ب/ برهن أنّ $\frac{OA}{2} = \frac{OI}{1} = \frac{AI}{3}$.
ج/ استنتج قيس OA.

## التمرين 8 :

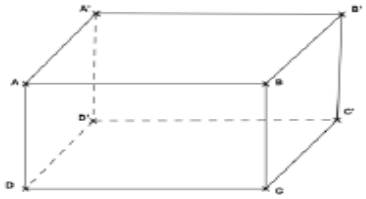
1) نعتبر العددين الحقيقيين: $a = 2\left(\sqrt{5}+1\right)^2 + \left(\sqrt{5}+2\right)^2$ و $b = \left(\sqrt{5}-1\right)^2 + \left(\sqrt{5}-2\right)^2 + \left(\sqrt{5}+1\right)^2$

أ/ بيّن أنّ $a = \left(\sqrt{5}+4\right)^2$ و $b = \left(2\sqrt{5}-1\right)^2$

ب/ برهن أنّ $a - b = 12\sqrt{5}$ واستنتج مقارنة $a$ و $b$

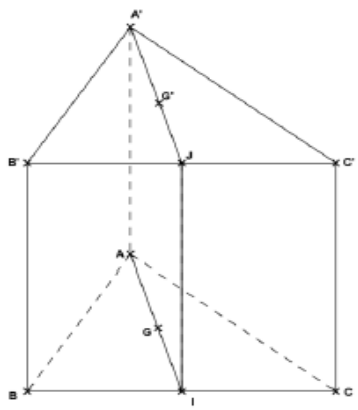


2) أ/ في الرّسم المقابل: EFGE'F'G' موشور قائم قاعدته EFG على شكل مثلث قائم الزاوية في E حيث: $EF = EG = \sqrt{5}+1$
وارتفاعه $EE' = \sqrt{5}+2$
بيّن أنّ: $FG' = 4+\sqrt{5}$.



ب/ في الرّسم المقابل ABCDA'B'C'D' متوازي مستطيلات
حيث: $AB = \sqrt{5}+1$ ، $AD = \sqrt{5}-2$ و $AA' = \sqrt{5}-1$
برهن أنّ $AC' = 2\sqrt{5}-1$
ج/ أحسب حجم كلّ من الموشور EFGE'F'G' ومتوازي المستطيلات ABCDA'B'C'D'.

## التمرين 9 :




في الرّسم المقابل ABCA'B'C' موشور قائم قاعدته ABC
مثلث متقايس الأضلاع قيس ضلعه 4 وارتفاع الموشور $AA' = 4$
ليكن I منتصف [BC] و J منتصف [B'C'].
G مركز ثقل المثلث ABC و G' مركز ثقل A'B'C'.
1) أحسب حجم الموشور ABCA'B'C'.
2) أ/ بين انIBBJ مستطيل و استنتج ان AIJA متوازي اضلاع.
ب / برهن ان (GG') موازي ل (AA') و ان GG'=4
3) أ/ بيّن أنّ (AA') عمودي على (ABC) واستنتج أنّ (GG') عمودي على (ABC).
ب/ برهن أنّ المثلث BGG' قائم الزاوية في G وأحسب BG'.
5) أحسب حجم والمساحة الجانبية للمخروط الدائري الذي قاعدته $\zeta$ الدائرة المحيطة بالمثلث ABC وقمته G'.



2019 Tunisie College.net

# الإحصاء و الإحتمالات

## التمرين 1 :

الجدول التالي يقدّم توزيع عمال شركة حسب أجورهم الشهرية

| الأجر الشهري | [400, 500[ | [500, 600[ | [600, 700[ | [700, 800[ |
|---|---|---|---|---|
| عدد العمّال | 40 | 20 | 30 | 10 |

1) أ/ مثّل السلسلة الإحصائيّة بمخطّط المستطيلات ثمّ أرسم مضلّع التكرارات.
ب/ أحسب معدّل الأجر الشهري للعامل في هذه الشركة.
2) أ/ كوّن جدولا يحوي التكرارات التراكمية الصاعدة والتواترات التراكمية الصاعدة.
ب/ أرسم مضلّع التواترات التراكمية الصاعدة.
ج/ جد قيمة تقريبية لموسّط هذه السلسلة الإحصائيّة.
3) إذا اخترنا عاملا بصورة عشوائية في هذه الشركة ما هو إحتمال أن يكون أجره الشهري محصورا بين 500 و 700 دينارا.

## التمرين 2 :

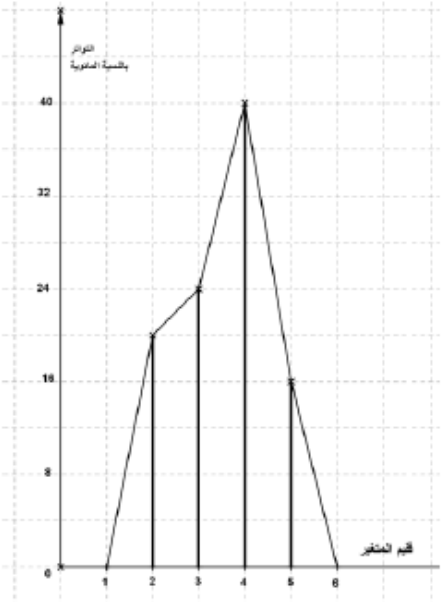
الجدول التالي يقدّم عدد أفراد كل عائلة في عيّنة مكوّنة من 50 عائلة

| عدد أفراد العائلة | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد العائلات | 8 | 16 | 14 | 8 | 4 |

1) مثّل السلسة الإحصائية بمخطّط العصيات ثمّ أرسم مضلّع التكرارات.
2) أ/ حدّد منوال ومدى هذه السلسلة الإحصائيّة.
ب/ ما هو معدّل عدد أفراد العائلة الواحدة في هذه العيّنة.
ج/ حدّد موسّط هذه السلسلة الإحصائية.
3) إذا إخترنا من هذه العيّنة إحدى العائلات بصورة عشوائية. ما هو إحتمال أن يكون عدد أفرادها أكبر أو يساوي 5.

## التمرين 3 :

الرسم البياني المقابل يمثّل مضلّع التواترات لسلسلة إحصائية كمية منقطعة.




1) حدّد منوال ومدى هذه السلسلة الإحصائية.
2) أنقل وأتمم الجدول التالي إذا علمت أنّ التكرار الجملي يساوي 25.

| قيم المتغير | 2 | | | |
|---|---|---|---|---|
| التواتر (%) | 20 | | | |
| التكرار | 5 | | | |

3) أحسب المعدّل الحسابي لهذه السلسلة الإحصائية.
4) حدّد موسّط هذه السلسلة الإحصائيّة.


2019 Tunisie College.net

## التمرين 4 :

يحتوي كيس على 3 كويرات تحمل الرقم 5 وكويرتين تحمل الرقم 3.
نعتبر التجربة العشوائية التالية: نقوم بسحب كويرة من الكيس، تسجيل الرقم المتحصل عليه في خانة الآحاد ودون إرجاعها نقوم بسحب كويرة ثانية وتسجيل الرقم المتحصل عليه في خانة العشرات لنتحصل على عدد مكوّن من رقمين.

1) بإستعمال شجرة اختيارات بيّن أنّ عدد جميع الامكانيات يساوي 20.
2) ما هو احتمال أن يكون العدد المتحصل عليه قابلا للقسمة على 3.
3) ما هو احتمال أن يكون العدد المتحصّل عليه قابلا للقسمة على 5.
4) ما هو احتمال أن يكون العدد المتحصل عليه قابلا للقسمة على 15.



## التمرين 5 :

الجدول التالي يقدّم توزيع عيّنة مكوّنة من 100 شخص حسب زمرة الدم (groupe sangain).

| المتغير: زمرة الدم | A | B | AB | O |
|---|---|---|---|---|
| التكرار: عدد الأفراد | 30 | 20 | 5 | 45 |

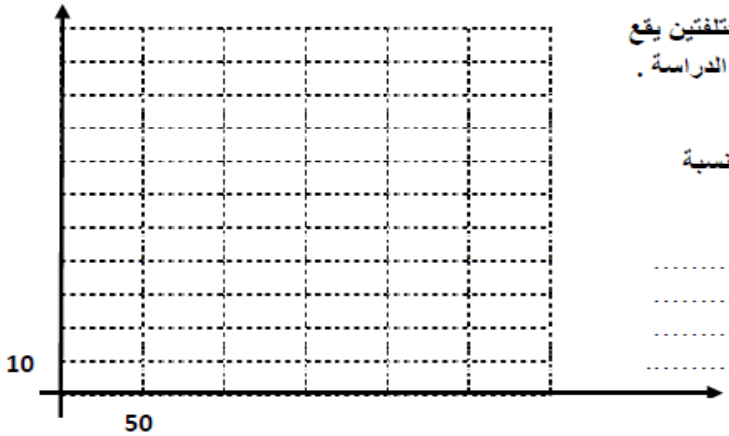
1) مثل هذه السلسلة الإحصائية بمخطط دائري.
2) نختار بصورة عشوائية، من هذه العيّنة أحد الأفراد ليتبرّع بالدم لفائدة فرد ثان من نفس هذه العيّنة.
أ/ جد باستعمال مبدأ الضرب، عدد الأزواج الممكن تكوينها.
ب/ ما هو إحتمال أن تكون زمرة دم المتبرع A وزمرة دم المتلقي B.
ج/ ما هو إحتمال أن يكون للفردين نفس زمرة الدم.

## التمرين 6 :

**يمثل الجدول التالي نتائج دراسة إحصائية خضعت لها 150 سيارة ي احد مراكز الفحص الفني للسيارات حول نسبة الغاز الملوّث للبيئة المنبعثة من كل منها في الجوّ ( وحدة القيس هي $g/km$ )**

| نسبة الغاز | [50 ; 70[ | [70 ; 90[ | [90 ; 110[ | [110 ; 130[ |
|---|---|---|---|---|
| عدد السيارات | 30 | 60 | 45 | 15 |
| التواتر بالنسبة المئوية | | | | |
| التكرار التراكمي الصاعد | | | | |
| التواتر التراكمي الصاعد بالنسبة المئوية | | | | |

1) أ – أكمل تعمير الجدول ب – ماهي الفئة المنوال لهذه السلسلة .....
2) أ – أرسم مضلع التواترات التراكمية الصاعدة بالنسبة المئوية ب – استنتج $M_e$ موسط هذه السلسلة $M_e$ =.....




3) أراد القائمون بهذه الدراسة تقديم مكافأة مالية لسيارتين مختلفتين يقع اختيارهما بطريقة عشوائية من بين كل سيارات المشاركة في الدراسة .
فتم اختيار سيارة أولى ثم ثانية .

فماهو احتمال ان تكون السيارتان المختارتان يفوق أو يساوي نسبة الغاز المنبعث منهما $110g/km$

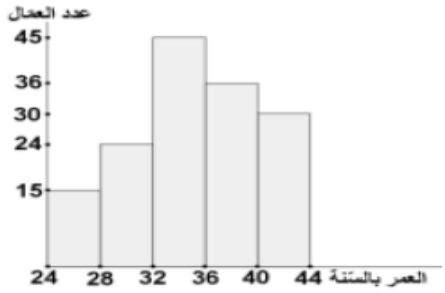
.....
.....
.....
.....



2019 Tunisie College.net

## التمرين 7 :

نقدّم من خلال المخطّط التّالي توزيعا لـ 150 عاملا بإحدى المؤسسات الصناعية حسب أعمارهم.




1) أنقل الجدول التّالي ثمّ أكمله بما يناسب :

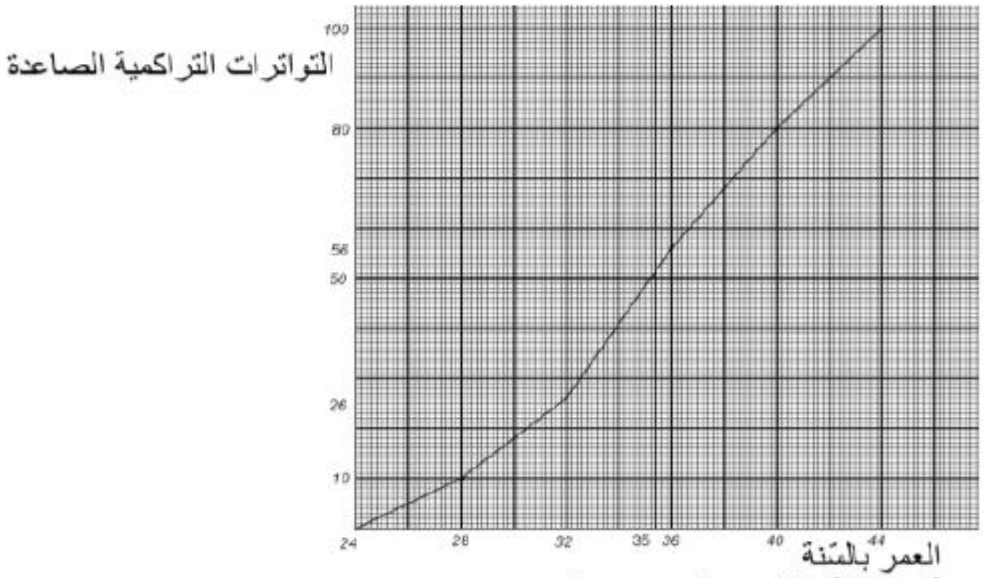
| العمر بالسنة | [24;28[ | [28;32[ | [32;36[ | [36;40[ | [40;44[ |
|---|---|---|---|---|---|
| مركز الفئة | 26 | | | | |
| التّكرار (عدد العمّال) | | | | 36 | |
| التواتر التراكمي الصاعد بالنسبة المائوية | | | 56 % | | |

2) احسب معدّل الأعمار بهذه المؤسسة الصناعية.
3) أ) ارسم مضلّع التّواترات التّراكمية الصّاعدة بالنسبة المائوية.
ب) استنتج قيمة تقريبية لموسّط هذه السلسلة.
4) تصرّف إدارة هذه المؤسّسة منحة خصوصية للعمّال الذين تجاوز سنّهم 36 سنة.
إذا اخترنا بصفة عشوائيّةٍ عاملا من هذه المؤسّسة، فما هو احتمال أن تشمله هذه المنحة؟

## الإصلاح :

| العمر بالسّنة | [24,28[ | [28,32[ | [32,36[ | [36,40[ | [40,44[ |
|---|---|---|---|---|---|
| مركز الفئة | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 |
| التّكرار (عدد العمّال) | 15 | 24 | 45 | 36 | 30 |
| التّواتر التّراكمي الصّاعد بالنّسبة المائوية | 10% | 26% | 56% | 80% | 100% |

2) معدّل أعمار العمّال بهذه المؤسّسة الصّناعية :
$(26\times15+30\times24+34\times45+38\times36+42\times30):150=35.12$
3) أ- مضلّع التّواترات التّراكمية الصّاعدة بالنّسبة المائوية :

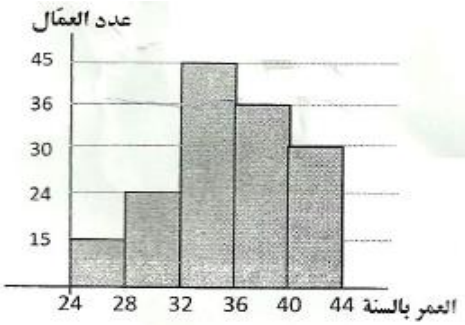



ب- موسّط هذه السّلسلة الإحصائية هو تقريبا 35.
4) إذا اخترنا بصفة عشوائية عاملا من هذه المؤسسة فاحتمال أن تشمله هذه المنحة هو 44%
$(\frac{66}{150}=0.44=\frac{44}{100})$



2019 Tunisie College.net

## التمرين 8 :




نُقدّم من خلال المخطّط التالي توزيعا لـ 150 عاملا بإحدى المؤسّسات الصناعيّة حسب أعمارهم.

1) أُنقل الجدول التالي ثمّ أكمله بما يناسب :

| العمر بالسنة | [24 ; 28[ | [28 ; 32[ | [32 ; 36[ | [36 ; 40[ | [40 ; 44[ |
|---|---|---|---|---|---|
| مركز الفئة | 26 | | | | |
| التكرار (عدد العمّال) | | | | 36 | |
| التواتر التراكمي الصاعد بالنسبة المائوية | | | 56 % | | |

2) أُحسب معدّل أعمار العمّال بهذه المؤسسة الصناعية.

3) أ) أُرسم مضلّع التواترات التراكمية الصاعدة بالنسبة المائوية.

ب) إستنتج قيمة تقريبيّة لـمُوسّط هذه السلسلة.

4) تَصْرف إدارة هذه المؤسّسة منحةً خصوصيّة للعمّال الذين تجاوز سنّهم 36 سنة

إذا اخترنا بصفة عشوائيّةٍ عاملا من هذه المؤسّسة، فما هو احتمال أنْ تشمله هذه المنحة ؟

## الإصلاح :

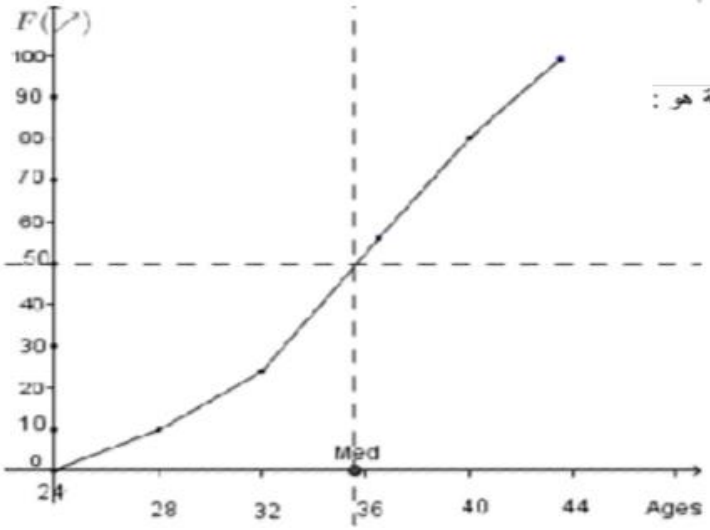
1- تعمير الجدول :

| العمر بالسنة | [24;28[ | [28;32[ | [32;36[ | [36;40[ | [40;44[ |
|---|---|---|---|---|---|
| مركز الفئة | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 |
| التكرار (عدد العمال) | 15 | 24 | 45 | 36 | 30 |
| التكرار التراكمي الصاعد | 15 | 39 | 84 | 120 | 150 |
| التواتر التراكمي الصاعد % | 10% | 26% | 56% | 80% | 100% |

2- معدل أعمار العمال بهذه المؤسسة الصناعية :

$$\overline{X} = \frac{26\times15+30\times24+34\times45+38\times36+42\times30}{150} = \frac{5268}{150} = 35,12$$

3- أ) مضلع التواترات التراكمية الصاعدة بالنسبة المائوية :




ب) القيمة التقريبية لموسط هذه السلسلة هي : $M_e \approx 35$

4- احتمال أن تشمل العامل الذي وقع اختياره بصفة عشوائية هذه المنحة هو :

$$\frac{36+30}{150} = \frac{66}{150} = 0,44 = 44\%$$



2019 Tunisie College.net

# جبر - معادلات - متراجحات - مقارنة -

## التمرين 1 :

1) نعتبر العددين الحقيقيين $a=4-3\sqrt{12}+\sqrt{48}$ و $b=(1+\sqrt{3})^2$

2) بيّنْ أنّ $a=4-2\sqrt{3}$ و $b=4+2\sqrt{3}$

3) أ) قارن بين $2\sqrt{3}$ و $4$ ثمّ استنتج علامة العدد $a$

ب) بيّن أنّ $a\times b=4$

ج) استنتج أنّ $\sqrt{\frac{a}{b}}=2-\sqrt{3}$

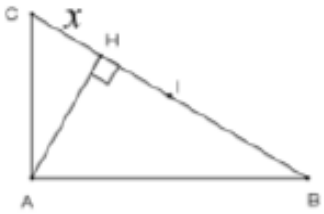
4) ليكن العدد الحقيقي $c=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

أ) بيّن أنّ العدد $c$ سالب.

ب) احسب $c^2$ ثمّ استنتج $c$.



## التمرين 2 :




(وحدة قيس الطول هي السنتيمتر)

- $ABC$ مثلّث قائم في $A$ و $I$ منتصف $[BC]$
- $H$ المسقط العمودي لـ $A$ على $(BC)$
- $BC=6$ و $AH=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ و $CH=x$ حيث $x$ عدد حقيقي موجب.

1) بيّنْ أنّ $AH^2=x(6-x)$ ثمّ استنتج أنّ العدد الحقيقي $x$ يحقّق المساواة : $x^2-6x+\frac{27}{4}=0$

2) بيّنْ أنّ $x^2-6x+\frac{27}{4}=(x-\frac{3}{2})(x-\frac{9}{2})$

3) استنتج $CH$ ثمّ احسب $AB$.

## التمرين 3 :

**يلي كلّ سؤال ثلاث إجابات، إحداها فقط صحيحة.**
**انقل، في كلّ مرّة، على ورقة تحريرك رقم السّؤال و الإجابة الصّحيحة الموافقة له.**

1) عدد الأعداد الصّحيحة الطّبيعية الزّوجية ذات ثلاثة أرقام مختلفة من بين 4 و 5 و 6 و 7 هو :

أ) 6 ب) 12 ج) 24

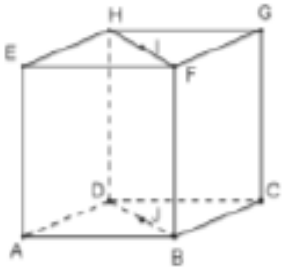
2) $x$ عدد حقيقي حيث $|x-3|\leq 4$. مدى هذا الحصر هو :

أ) 4 ب) 7 ج) 8

3) في الرّسم المقابل، لدينا : $ABCDEFGH$ مكعّب حيث $I$ منتصف $[EG]$ و $J$ منتصف $[AC]$.

المستقيم $(FH)$ عمودي على المستوي :

أ) $(ADH)$ ب) $(EGC)$ ج) $(HIJ)$






2019 Tunisie College.net

## التمرين 4 :

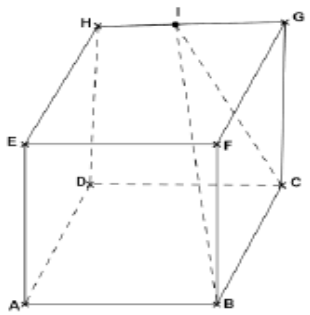
يلي كل سؤال ثلاث إجابات إحداها فقط صحيحة.
أنقل في كلّ مرّة على ورقة تحريرك رقم السؤال والإجابة الصحيحة الموافقة له.

1) يكون العدد 7b8a حيث a و b رقمان، قابلا للقسمة على 15 في حالة:
أ/ $a = 0$ و $b = 1$ ب/ $a = 3$ و $b = 3$ ج/ $a = 5$ و $b = 1$.

2) عدد الأعداد الفردية ذات ثلاثة أرقام مختلفة من بين: 6 و 7 و 8 و 9 هو:
أ/ 6 ب/ 12 ج/ 24

3) عدد حلول المعادلة $\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{x}$ في R هو:
أ/ 0 ب/ 1 ج/ 2

4) إذا كان ABCDEFGH مكعّبا و $I = H*G$ فإنّ المثلّث IBC
أ/ متقايس الأضلاع ب/ متقايس الضلعين
ج/ قائم الزاوية






## التمرين 5 :

نعتبر العددين الحقيقيين: $a = \left(2+\sqrt{3}\right)^2$ و $b = 3-4\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

1) أ/ بيّن أنّ : $a = 7+4\sqrt{3}$ و $b = 7-4\sqrt{3}$
ب/ قارن بين 7 و $4\sqrt{3}$ واستنتج علامة العدد b.

2) أ/ بيّن أنّ b هو مقلوب العدد a وأنّ $a + b = 14$
ب/ استنتج أنّ $\sqrt{a}+\sqrt{b} = 4$

3) ليكن العدد $c = \sqrt{b}-\sqrt{a}$
أ/ بيّن أنّ c عدد سالب
ب/ أحسب $c^2$ واستنتج c.

## التمرين 6 :

لتكن العبارة : $A = x^2 - 40x + 384$ حيث x عدد حقيقي

1) أحسب القيمة العددية للعبارة A في كلّ من الحالتين التاليتين:
أ/ $x = 20$ ب/ $x = 16$

2) أ/ أنشر واختصر العبارة $(x - 20)^2$
ب/ أستنتج أنّ: $A = (x - 20)^2 - 16$
ج/ فكّك العبارة A إلى جذاء عوامل
د/ حلّ في R المعادلة: $A = 0$

3) (وحدة قيس الطول هي المتر)
في هذا السؤال نريد البحث عن بعدي مستطيل محيطه 80 م ومساحته 384م$^2$ .
أ/ ليكن a أحد بعدي هذا المستطيل. تحقق أنّ $40 - a$ هو البعد الثاني
ب/ بيّن أنّ a هو حل المعادلة $x^2 - 40x + 384 = 0$
ج/ استنتج بعدي المستطيل.



2019 Tunisie College.net

## التمرين 7 :

1) نعتبر العددين الحقيقيين: $a=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ و $b=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

أ/ أحسب ab و a + b

ب/ برهن أنّ $a^2=2+\sqrt{3}$ و $b^2=2-\sqrt{3}$

ج/ استنتج أنّ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ هو عدد صحيح طبيعي

2) في الرسم المقابل: $\zeta$ دائرة مركزها O وشعاعها 1 و [AB] قطر لها.

الهدف في هذا السؤال حساب BC و AC.

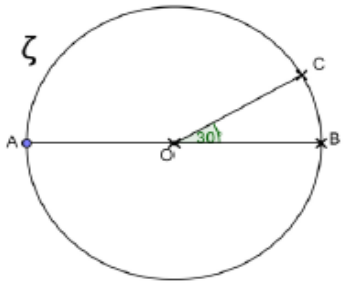
المستقيم العمودي على (AB) والمار من C يقطع (AB) في H ويقطع $\zeta$ في D.

أ/ ما هي طبيعة المثلث OCD؟ علّل جوابك.

ب/ استنتج أنّ $HC=\frac{1}{2}$ و أنّ $OH=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ج/ بيّن أنّ BC = b

د/ بيّن أنّ ABC قائم الزاوية واستنتج أنّ AC = a.






## التمرين 8 :

نعتبر العبارة: $A=-\frac{2}{3}(3x-6)-x-1$ حيث x عدد حقيقي.

1) أ/ بيّن أنّ A = -3x + 3.

ب/ حلّ في R المتراجحة $A\geq 0$ .

2) لتكن العبارة $B=x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}$ حيث x عدد حقيقي.

أ/ أحسب القيمة العددية للعبارة B في حالة $x=\sqrt{3}$ .

ب/ بيّن أنّ: $B=(x-1)\left(x-\sqrt{3}\right)$ .

3) أ/ بيّن أنّ: $B-A=(x-1)\left(x-\sqrt{3}+3\right)$

ب/ أوجد الأعداد الحقيقية x بحيث A = B

## التمرين 9 :

نعتبر العددين الحقيقيّين $a=9+4\sqrt{5}$ و $b=9-4\sqrt{5}$

1) أ/ بيّن أنّ العدد a مقلوب العدد b

ب/ أحسب $a^2$ و $b^2$

2) أ/ بيّن أنّ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=322$

ب/ استنتج أنّ العدد $c=\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$ هو عدد صحيح طبيعي

3) ليكن العدد: $d=(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$

أ/ بيّن أنّ $d=\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}$

ب/ استنتج أنّ d = 1.



2019 Tunisie College.net

## التمرين 10 :

لتكن العبارة $A=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(x-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$ حيث x عدد حقيقي.

1) أ/ أنشر واختصر العبارة A لتبيّن أنّ: $A = 2(x - 2)$.

ب/ حلّ في R المتراجحة: $A\le\sqrt{2}-2$

2) لتكن العبارة $B=\left(2x-\sqrt{2}\right)^2+4x^2-2$ حيث x عدد حقيقي

أ/ فكّك العبارة B إلى جذاء عوامل لتبيّن أنّ $B=4x\left(2x-\sqrt{2}\right)$

ب/ حلّ في R المعادلة $B = 0$ .

3) أوجد الأعداد الحقيقية x بحيث $\frac{B}{A}=-2\sqrt{2}$.



## التمرين 11 :

1) نعتبر العددين الحقيقيين $a=5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$ و $b=5\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

أ/ حدّد علامة العدد a.

ب/ برهن أنّ $ab = 2$ و $a+b=10\sqrt{2}$ و $b-a=8\sqrt{3}$

2) ليكن العددان: $X = a^2 + b^2$ و $Y = b^2 - a^2$

استنتج من السؤال السابق أنّ: $X = 196$ و $Y=80\sqrt{6}$

3) ليكن العدد الحقيقي: $Z=(3a+2b)^2+(2a-3b)^2$

بين أنّ $Z = 13X$ واستنتج القيمة العددية لـZ.

## التمرين 12 :

نعتبر العبارة $A = 3x^2 + 8$ حيث x عدد حقيقي.

1) أحسب القيمة العددية للعبارة A في كلّ من الحالتين التاليتين:

أ/ $x = 0$ ب/ $x=\sqrt{2}-1$

2) أ/ بيّن أنّ: $A - 875 = 3(x - 17)(x + 17)$

ب/ استنتج العدد الصحيح الطبيعي x بحيث $A = 875$.

3) أ/ بيّن أنّ: $A = (x - 2)^2 + x^2 + (x + 2)^2$

ب/ استنتج ثلاثة أعداد صحيحة طبيعية فردية متتالية مجموع مربعاتها 875.

## التمرين 13 :

نعتبر العددين الحقيقيين: $a=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)-\left(1+2\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$ و $b=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$

1) أ/ بيّن أنّ $a=7-4\sqrt{3}$ و $b=7+4\sqrt{3}$

ب/ بيّن أنّ a مقلوب العدد b واستنتج علامة العدد a.

2) ليكن العدد الحقيقي: $c=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

أ/ بيّن أنّ $c = (a + b)^2 - 2ab$.

ب/ استنتج القيمة العددية لـ c.

3) ليكن العدد الحقيقي: $d=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

أ/ بيّن أنّ $d^2 = a + b + 2$.

ب/ استنتج d ثمّ $\sqrt{a}$.



2019 Tunisie College.net

## التمرين 14 :

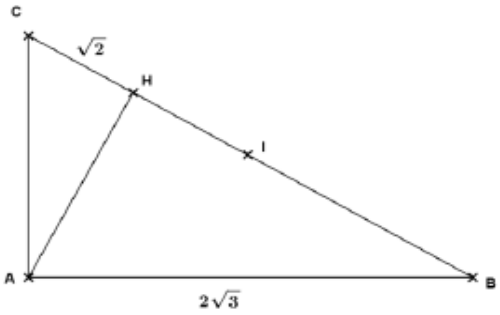
وحدة قيس الطول هي الصنتمتر)
ليكن ABC مثلثا حيث $AB = 4$ ; $AC = 4\sqrt{3}$ و $BC = 8$.
1) بيّن أنّ المثلث ABC قائم الزاوية في A.
2) لتكن M نقطة على [AB] حيث $BM = x$ (x عدد حقيقي يحقق $0 < x < 4$)
المستقيم المار من M والعمودي على (AB) يقطع (BC) في N.
أ/ أنجز الرّسم.
ب/ بيّن أنّ: $MN = \sqrt{3}.x$
ج/ لتكن a مساحة المثلث AMN. بيّن أنّ $a = \frac{\sqrt{3}}{2}x(4-x)$
3) أ/ بيّن أنّ: $2\sqrt{3} - a = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)^2$
ب/ استنتج أنّ $0 < a \leq 2\sqrt{3}$
4) أ/ جد قيمة العدد x ليكون قيس مساحة المثلث AMN بالصنتمتر مربع مساويا لـ $2\sqrt{3}$
ب/ حدّد في هذه الحالة موقع النقطة M على [AB] وموقع النقطة N على [BC].

## التمرين 15 :

1) نعتبر العددين الحقيقيين: $a = (3+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) + (3+\sqrt{2})^2$ و $b = (\sqrt{5}+2)^2 + (\sqrt{5}-1)^2$
أ/ بيّن أنّ $a = 15+5\sqrt{2}$ و $b = 15+2\sqrt{5}$
ب/ قارن $5\sqrt{2}$ و $2\sqrt{5}$ واستنتج مقارنة a و b.
2) نعتبر العددين الحقيقيين: $c = 8-2\sqrt{7}$ و $d = 6-2\sqrt{5}$
أ/ بيّن أنّ $c-d = 2(1+\sqrt{5}-\sqrt{7})$
ب/ قارن العددين $(1+\sqrt{5})^2$ و $(\sqrt{7})^2$ واستنتج مقارنة العددين c و d.
ج/ بيّن أنّ $c = (\sqrt{7}-1)^2$ و $d = (\sqrt{5}-1)^2$ واستنتج مقارنة c و d بطريقة أخرى.

## التمرين 16 :

وحدة قيس الطول هي الصنتمتر
في الرسم المقابل لدينا:




- ABC مثلث قائم في A .
- H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).
- $AB = 2\sqrt{3}$ و $CH = \sqrt{2}x$ و $BH = x$ (حيث x عدد حقيقي موجب)

1) بيّن أنّ: $AH^2 = \sqrt{2}x$ و $AH^2 = 12-x^2$
2) استنتج أنّ العدد x هو حلّ للمعادلة: $x^2 + \sqrt{2}x - 12 = 0$
3) أ/ بيّن أنّ $x^2 + \sqrt{2}x - 12 = \left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$
ب/ حلّ في IR المعادلة: $x^2 + \sqrt{2}x - 12 = 0$
4) استنتج BH وأحسب AC.


2019 Tunisie College.net

## التمرين 17 :

I) نعتبر العبارتين A و B التاليتين حيث $x$ عدد حقيقي

$A = 2x^2 - 4x + 2$ و $B = x^2 - 4x + 3$

1) أحسب القيمة العددية لـ A و B إذا كان $x = 1 - \sqrt{2}$

2) أثبت أنّ $B = (x-2)^2 - 1$

3) أكتب كلا من A و B في صيغة جذاء

4) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلتين $A = 2$ و $B = 0$

5) أثبت أنّ $A + B = (3x-5)(x-1)$ و $B - A = 1 - x^2$

6) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلتين $A + B = 0$ و $B = A$

II) نعتبر العد د الحقيقي x حيث $|x| \leq 3$

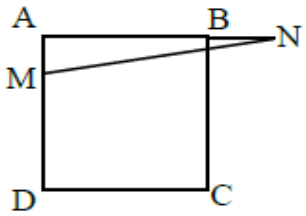
1) أوجد حصرا لـكلا من $\frac{x}{3} + 5$ و $2x - 8$

2) إختصر العبارة التالية $E = |2x - 8| - \left|\frac{x}{3} + 5\right|$

3) حل المتراجحة $|E| \leq 5$



## التمرين 18 :




1) نعتبر العبارة I التالية $I = x^2 + 2x - 8$

أثبت أنّ $I = (x-2)(x+4)$ ثمّ حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $I = 0$

2) ليكن ABCD مربعا طول ضلعه 4 صم و M نقطة من [AD] حيث $AM = x$ و لتكن N نقطة من [AB] و لا تنتمي للقطعة [AB] حيث $BN = 2x$

أ - أحسب مساحة المثلث AMN بدلالة x

ب- أوجد x حيث مساحة المثلث AMN تساوي نصف مساحة المربع ABCD

ج- عين على [BA] نقطة P و لا تنتمي للقطعة [AB] حيث $AP = 2x$ و النقطة E منتصف [DC] إلى أي مجال ينتمي x حيث مساحة المثلث AMN أصغر أو مساوية لمجموع مساحتي المثلثين AMP و ADE

## التمرين 19 :

1) نعتبر العددان الحقيقيان x و y حيث $|x| \leq 3$ و $|y| \leq 2$

أ- أوجد حصرا لـكلا من $x$ و $y$

ب- أوجد حصرا لـ $x+4$ و $2y-5$

ت- استنتج حصرا لـ $\frac{x+4}{2y-5}$

2) أ- أثبت أنّ $xy$ ينتمي للمجال $[-6;6]$

## التمرين 20 :

نعتبر العبارتين A و B التاليتين حيث $x$ عدد حقيقي

$A = (x-5)^2 - 4$ و $B = x^2 - 6x + 9 + (x+4)(x-3)$

1) أنشر و اختصر العبارة A

2) أحسب القيمة العددية لـ A في كلا من الحالتين | أ- $x = 3$ | ب- $x = \sqrt{2}$

3) أ- أكتب كلا من A و B في صيغة جذاء

ب- حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلتين $A = 21$ و $A + B = 0$

4) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة $A \leq 11 + x^2$



2019 Tunisie College.net