I - التعداد و الحساب

" المبرهنة التمهيديّة لـ Gauss "

	مثال
a قاسم لـ c b قاسم لـ c a و b أوّليّان في ما بينهما إذا $a \times b$ قاسم لـ c	المطلوب: بيّن أنّ 12 قاسم لـ 3525132. الحلّ: 3 قاسم لـ 3525132 4 قاسم لـ 3525132 3 و 4 أوّليّان في ما بينهما إذا 3x4 قاسم لـ 3525132. يعني " 12 قاسم لـ 3525132 " . **أمثلة أخرى :** كل عدد يقبل القسمة على 3 و 5 فهو يقبل القسمة على 15. كل عدد يقبل القسمة على 3 و 7 فهو يقبل القسمة على 21. كل عدد يقبل القسمة على 9 و 5 فهو يقبل القسمة على 45. والأمثلة متعدّدة .....
a قاسم لـ bc a و b أوّليّان في ما بينهما إذا a قاسم لـ c	مثال 7 قاسم لـ 5a 7 و 5 أوّليّان في ما بينهما إذا 7 قاسم لـ a.

تطبيقات

1 - إذا كان لنا 6 قاسم لـ $5^n a$ إذا 6 قاسم لـ a لأنّ 6 و 5^n أوّليّان في ما بينهما.

2 - بين أن $A = 3^{12} - 3^{11}$ هو عدد زوجي.

الحل:

$A = 3^{12} - 3^{11} = (3-1) \times 3^{11} = 2 \times 3^{11}$.

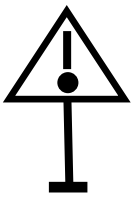
ومنه فإن A مضاعف لـ 2 يعني A عدد زوجي.

3 - بين أن $(9^{23} - 4 \times 9^{22})$ مضاعف لـ 5 : $9^{23} - 4 \times 9^{22} = (9-4) \times 9^{22} = 5 \times 9^{22}$

و بالتالي $(9^{23} - 4 \times 9^{22})$ مضاعف لـ 5 .

TunisieCollege.net © 2011

II - الجذر التربيعي



يجب أن نعلم :

إذا كان $x^2 = a$ فإن $x = \sqrt{a}$ أو $x = -\sqrt{a}$ بحيث $a \in IR_+$

القاعدة 1 :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad , (a \in IR_+ \ , \ b \in IR_+)$$

استعمالاتها:

$$a = \sqrt{75} - 7\sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} - 7\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = -2\sqrt{3}.$$

$$b = 8\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}} - 6\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 8\frac{\sqrt{5\times7}}{\sqrt{5}} - 6\frac{\sqrt{3\times7}}{\sqrt{3}} = 8\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}{\sqrt{5}} - 6\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{7} - 6\sqrt{7} = 2\sqrt{7}.$$

القاعدة 2 :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad , (a \in IR_+ \ , \ b \in IR_+^*)$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad , (a \in IR_+^*)$$

استعمالاتها:

$$a = \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{5\sqrt{3}}{10} + \frac{2\sqrt{3}}{10} = \frac{7\sqrt{3}}{10} .$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad .$$

القاعدة 3 :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2} = a \ , \ a \in IR^+$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad , a \in IR$$

استعمالاتها:

$$a = \sqrt{3}^8 = \left[\left(\sqrt{3}\right)^2\right]^4 = 3^4 = 81.$$

$$b = \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} = |1-\sqrt{2}| + |2-\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 + 2 - \sqrt{2} = 1.$$

TunisieCollege.net © 2011

III - القوى في IR

القاعدة 1 :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \ , \ n \in \mathbb{Z} \ , \ a \in IR^* , \ b \in IR^*$$

مثال:

$$(5\sqrt{3})^2 = 5^2 \times (\sqrt{3})^2 = 25 \times 3 = 75.$$

$$(-2\sqrt{7})^3 = (-2)^3 \times (\sqrt{7})^3 = -8 \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} = -8 \times 7 \times \sqrt{7} = -56\sqrt{7}.$$

القاعدة 2 :

$$(a^n)^m = a^{n \times m} \ , \ n \in \mathbb{Z} \ , m \in \mathbb{Z} \ , \ a \in IR^*$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

مثال:

$$(\sqrt{2})^6 = \left(\sqrt{2}^2\right)^3 = 2^3 = 8 \ .$$

$$(\sqrt{3})^8 = \left(\sqrt{3}^2\right)^4 = 3^4 = 81 \ .$$

القاعدة 3 :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \ , \ n \in \mathbb{Z} \ , m \in \mathbb{Z} \ , \ a \in IR^*$$

مثال:

$$(\sqrt{7})^{15} \times (\sqrt{7})^{-15} = (\sqrt{7})^{15+(-15)} = (\sqrt{7})^0 = 1.$$

$$(\sqrt{5})^{-123} \times (\sqrt{5})^{125} = (\sqrt{5})^{-123+125} = (\sqrt{5})^2 = 5.$$

القاعدة 4 :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ , \ n \in \mathbb{Z} \ ; \ b \in IR^* \ ; a \in IR^*$$

القاعدة 5 :

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} = a^{-n} \ , \ n \in \mathbb{Z} \ ; \ a \in IR^*$$

TunisieCollege.net © 2011

IV - الجذاءات المعتبرة

النّشر

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ✓
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ✓
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ ✓

❖ **تطبيقات:**

$A = (y+3)^2 - y^2 = y^2 + 2 \times y \times 3 + 3^2 - y^2 = 6y + 9.$

$B = \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{35} = \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{35}$

$= 7 - 2\sqrt{35} + 5 + 2\sqrt{35} = 7 + 5 = 12.$

$C = \left(3 - \sqrt{5}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right) = 3^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9 - 5 = 4$

التّفكيك

$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$ ✓
$\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2}$ ✓
$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$ ✓

❖ **تطبيقات:**

$A = 9 + 6x + x^2 = \underbrace{3^2 + 2 \times 3 \times x + x^2}_{\boldsymbol{a^2 + 2 \times a \times b + b^2}} = \underbrace{(3+x)^2}_{\boldsymbol{(a+b)^2}}.$

$B = 9y^2 - 6y\sqrt{5} + 5 = \underbrace{(3y)^2 - 2 \times 3y \times \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2}_{\boldsymbol{a^2 - 2 \times a \times b + b^2}} = \underbrace{\left(3y - \sqrt{5}\right)^2}_{\boldsymbol{(a-b)^2}}.$

$C = 16x^2 - 5 = \underbrace{(4x)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2}_{\boldsymbol{a^2 - b^2}} = \underbrace{\left(4x - \sqrt{5}\right)\left(4x + \sqrt{5}\right)}_{\boldsymbol{(a-b)(a+b)}}.$

$D = (5x+4)^2 - 9 = (5x+4)^2 - 3^2 = \Big[(5x+4) - 3\Big] \times \Big[(5x+4) + 3\Big]$

$= (5x + 4 - 3)(5x + 4 + 3) = (5x+1)(5x+7).$

TunisieCollege.net © 2011

V - الترتيب والمقارنة

عموما :

$a \leq b$ يعني $(a-b) \in IR_-$

$a \geq b$ يعني $(a-b) \in IR_+$

I الترتيب والجمع:

- $a \leq b$ يعني $a + C \leq b + C$ (لا يتغيّر اتجاه الترتيب عند إضافة نفس القيمة) .
- $a \leq b$ يعني $a - C \leq b - C$ (لا يتغيّر اتجاه الترتيب عند حذف نفس القيمة) .
- $a \leq b$ و $c \leq d$ إذا !! $a + C \leq b + d$ (جمع الحدود مثنى مثنى لا يغيّر اتجاه التّرتيب).

II الترتيب والضرب:

1) **الحالة الأولى:** " الضرب في عدد موجب لا يغيّر اتجاه الترتيب "

- إذا كان لنا : $C \in IR_+^*$ فإنّ $a \leq b$ يعني $a \times C \leq b \times C$.

2) **الحالة الثانية:** " الضرب في عدد سالب يغيّر اتجاه الترتيب "

- إذا كان لنا : $C \in IR_-^*$ فإنّ $a \leq b$ يعني $a \times C \geq b \times C$.

3) **الحالة الثالثة:** " ضرب حدود جميعها سالبة مثنى مثنى "

- إذا كان لنا : $a \in IR_-$, $b \in IR_-$, $C \in IR_-$, $d \in IR_-$:

فإنّ : $a \leq b$ و $c \leq d$ يعني $a \times C \geq b \times C$.

4) **الحالة الرابعة:** " ضرب حدود جميعها موجبة مثنى مثنى "

- إذا كان لنا : $a \in IR_+$, $b \in IR_+$, $C \in IR_+$, $d \in IR_+$:

فإنّ : $a \leq b$ و $c \leq d$ يعني $a \times C \leq b \times C$

III الترتيب والمقلوب:

ليكن $a \in IR^*$ و $b \in IR^*$ بحيث a و b لهما **نفس العلامة** إذا :

- $a \leq b$ يعني $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

IV الترتيب والمربّع:

- $a \in IR_+$, $b \in IR_+$: $a \leq b$ يعني $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ يعني $a^2 \leq b^2$.
- $a \in IR_-$, $b \in IR_-$: $a \leq b$ يعني $|a| \geq |b|$ يعني $a^2 \geq b^2$.

TunisieCollege.net © 2011

VI - الحصر والمجالات

TunisieCollege.net © 2011

VII -المعادلات والمتراجحات

TunisieCollege.net © 2011

VIII طالس

TunisieCollege.net © 2011

TunisieCollege.net © 2011